

**Miejsce  
na naklejkę**

**MMA-R1\_1P-092**

**EGZAMIN MATURALNY  
Z MATEMATYKI**

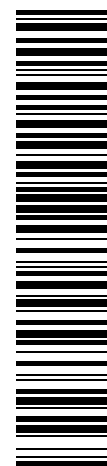
**MAJ  
ROK 2009**

**POZIOM ROZSZERZONY**

**Czas pracy 180 minut**

**Instrukcja dla zdającego**

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 16 stron (zadania 1 – 11). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.



Za rozwiązanie  
wszystkich zadań  
można otrzymać  
łącznie  
**50 punktów**

*Życzymy powodzenia!*

**Wypełnia zdający  
przed rozpoczęciem pracy**

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**PESEL ZDAJĄCEGO**

--	--	--

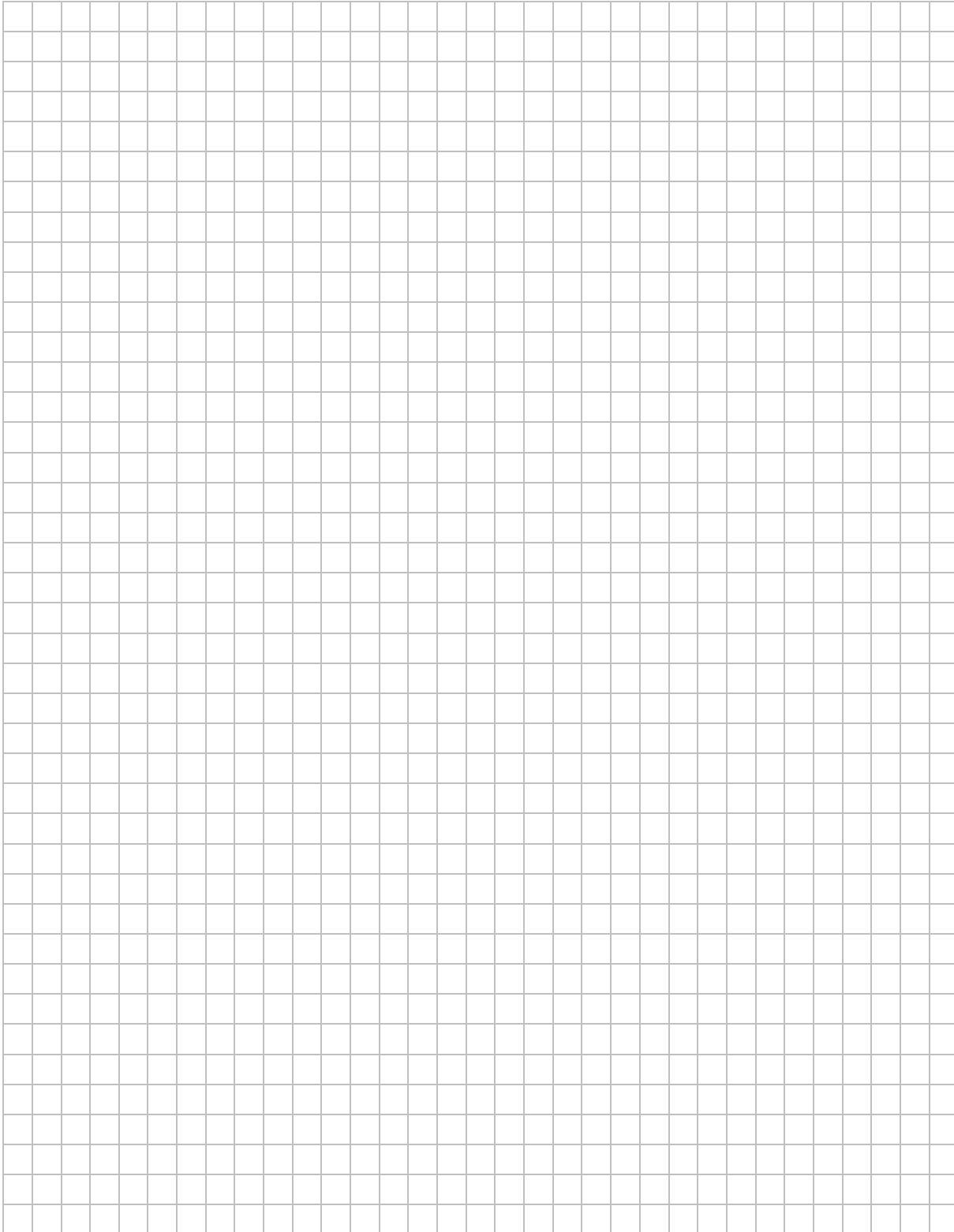
**KOD  
ZDAJĄCEGO**

**Zadanie 1. (4 pkt)**

Funkcja liniowa  $f$  określona jest wzorem  $f(x) = ax + b$  dla  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) Dla  $a = 2008$  i  $b = 2009$  zbadaj, czy do wykresu tej funkcji należy punkt  $P = (2009, 2009^2)$ .  
 b) Narysuj w układzie współrzędnych zbiór

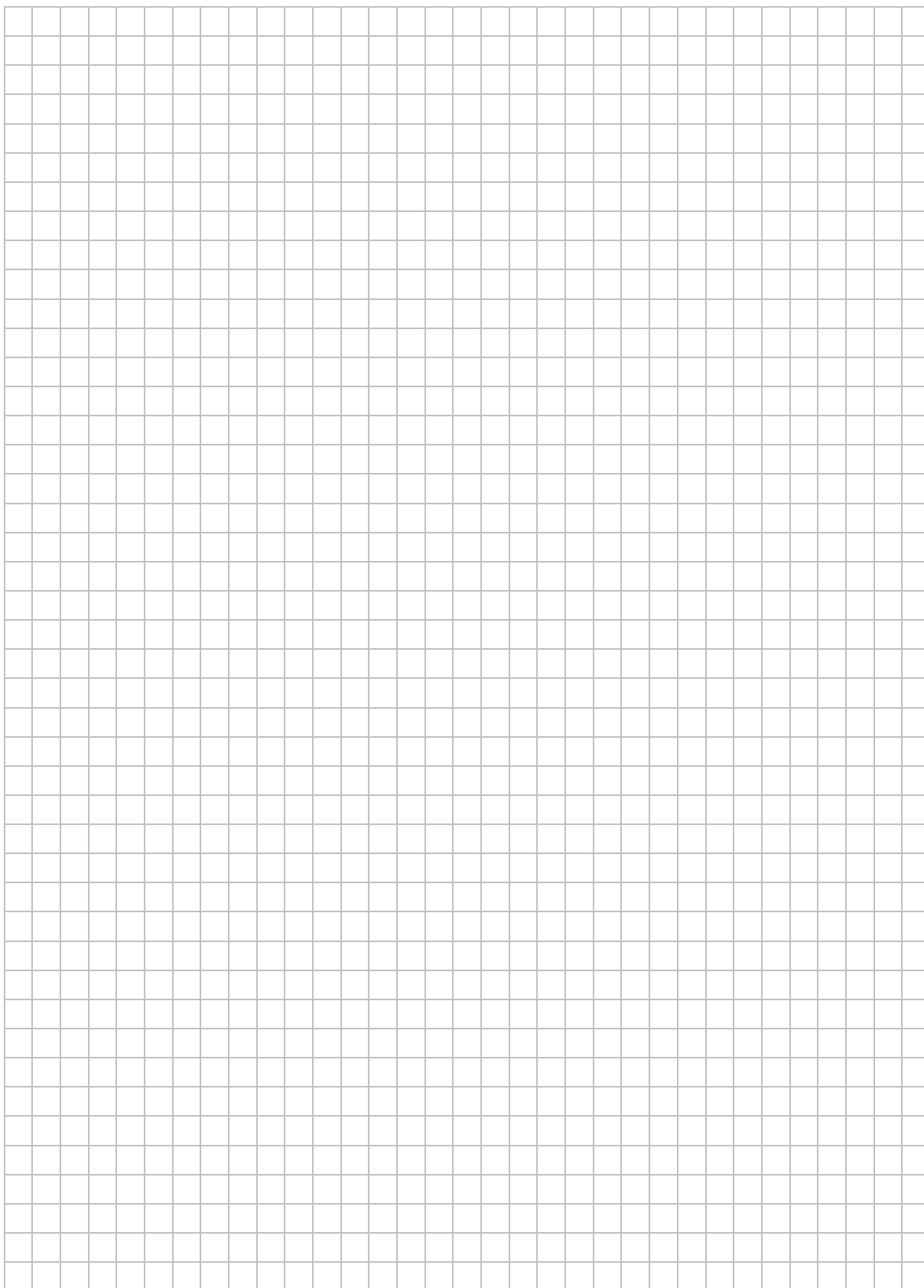
$$A = \left\{ (x, y) : x \in \langle -1, 3 \rangle \text{ i } y = -\frac{1}{2}x + b \text{ i } b \in \langle -2, 1 \rangle \right\}.$$



<b>Wypełnia egzaminator!</b>	<b>Nr czynności</b>	<b>1.1.</b>	<b>1.2.</b>	<b>1.3.</b>	<b>1.4.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>				

**Zadanie 2. (4 pkt)**

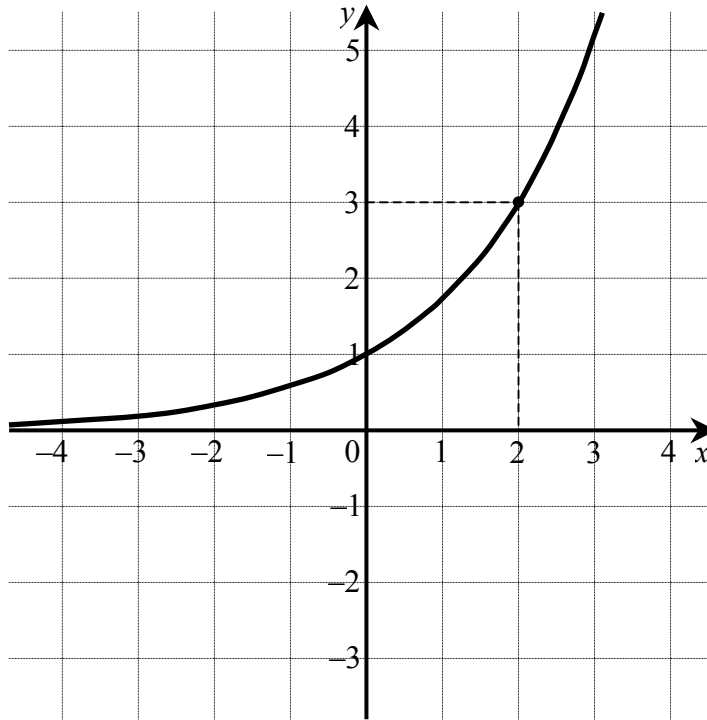
Przy dzieleniu wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $(x-1)$  otrzymujemy iloraz  $Q(x) = 8x^2 + 4x - 14$  oraz resztę  $R(x) = -5$ . Oblicz pierwiastki wielomianu  $W(x)$ .



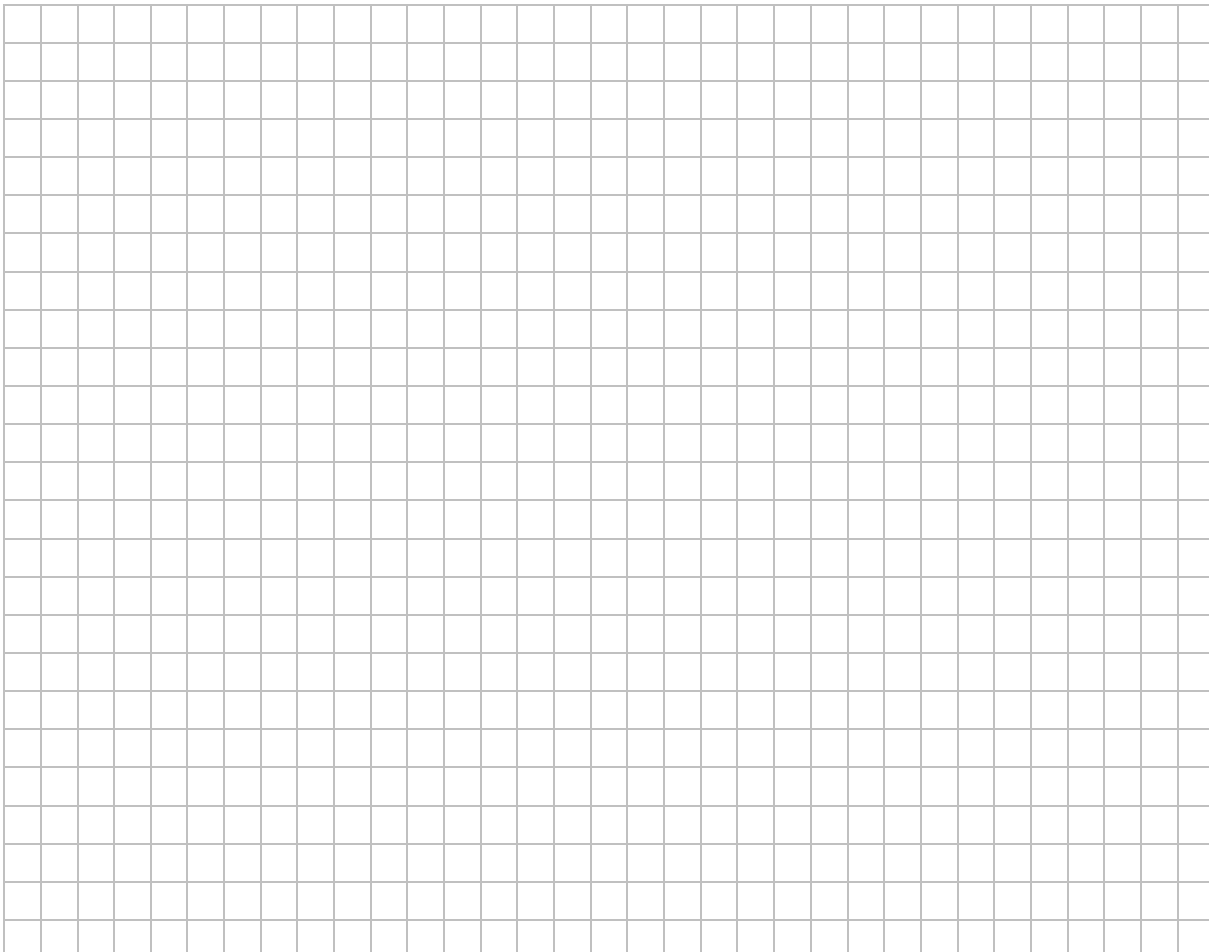
<b>Wypełnia egzaminator!</b>	<b>Nr czynności</b>	<b>2.1.</b>	<b>2.2.</b>	<b>2.3.</b>	<b>2.4.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>				

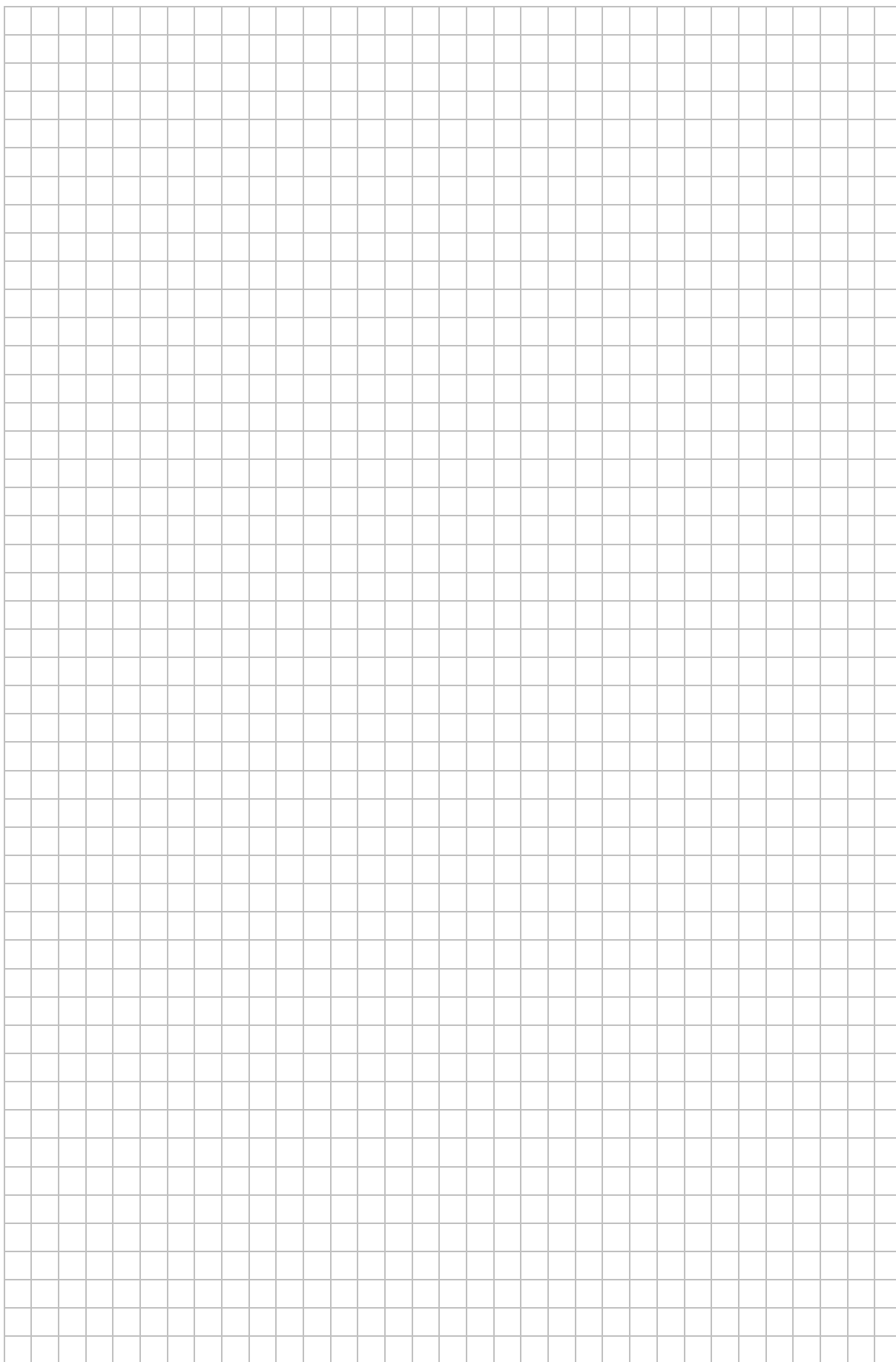
**Zadanie 3. (4 pkt)**

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji wykładniczej  $f(x) = a^x$  dla  $x \in \mathbb{R}$ .



- a) Oblicz  $a$ .
- b) Narysuj wykres funkcji  $g(x) = |f(x) - 2|$  i podaj wszystkie wartości parametru  $m \in \mathbb{R}$ , dla których równanie  $g(x) = m$  ma dokładnie jedno rozwiązanie.

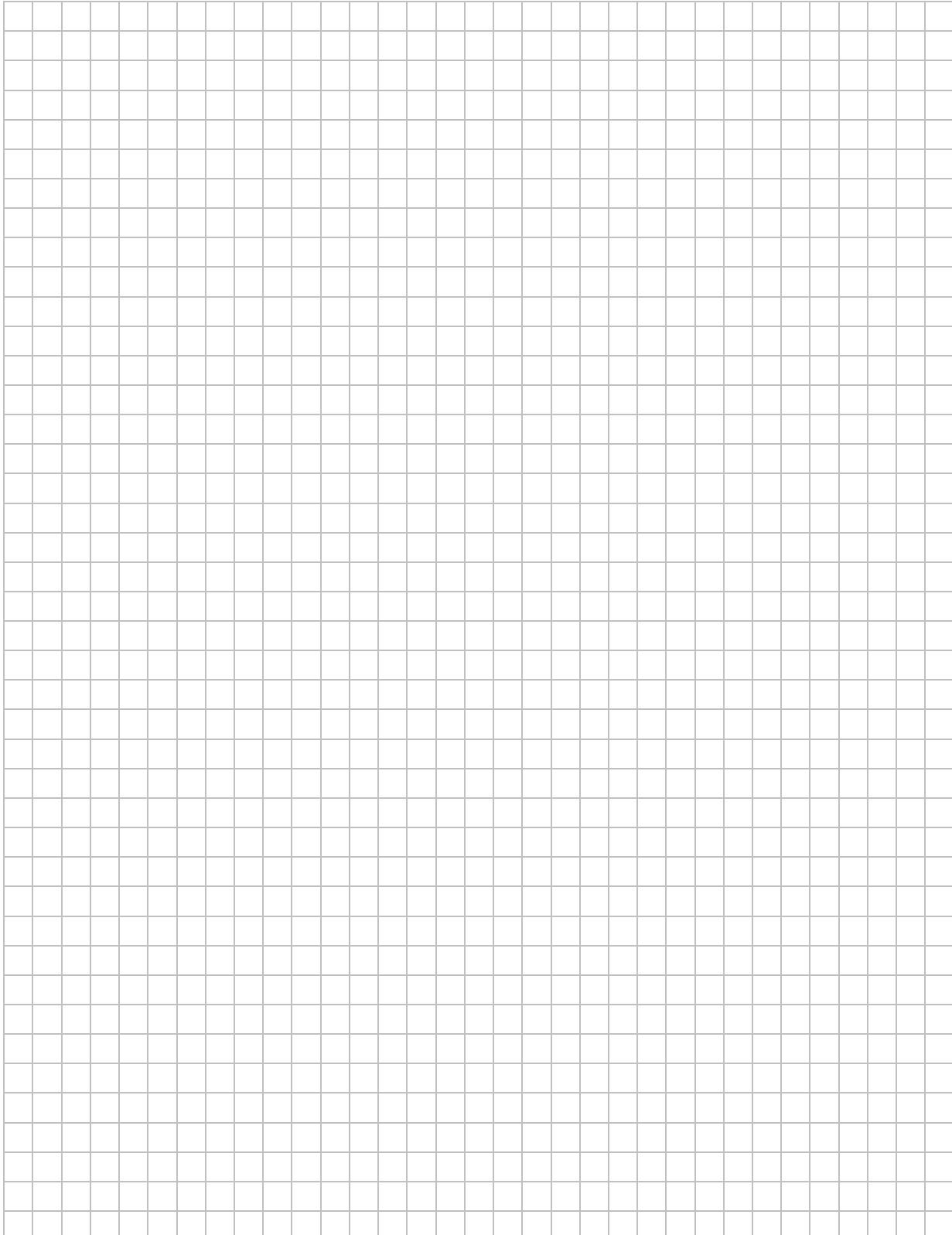




<b>Wypełnia egzaminator!</b>	<b>Nr czynności</b>	<b>3.1.</b>	<b>3.2.</b>	<b>3.3.</b>	<b>3.4.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>				

**Zadanie 4. (5 pkt)**

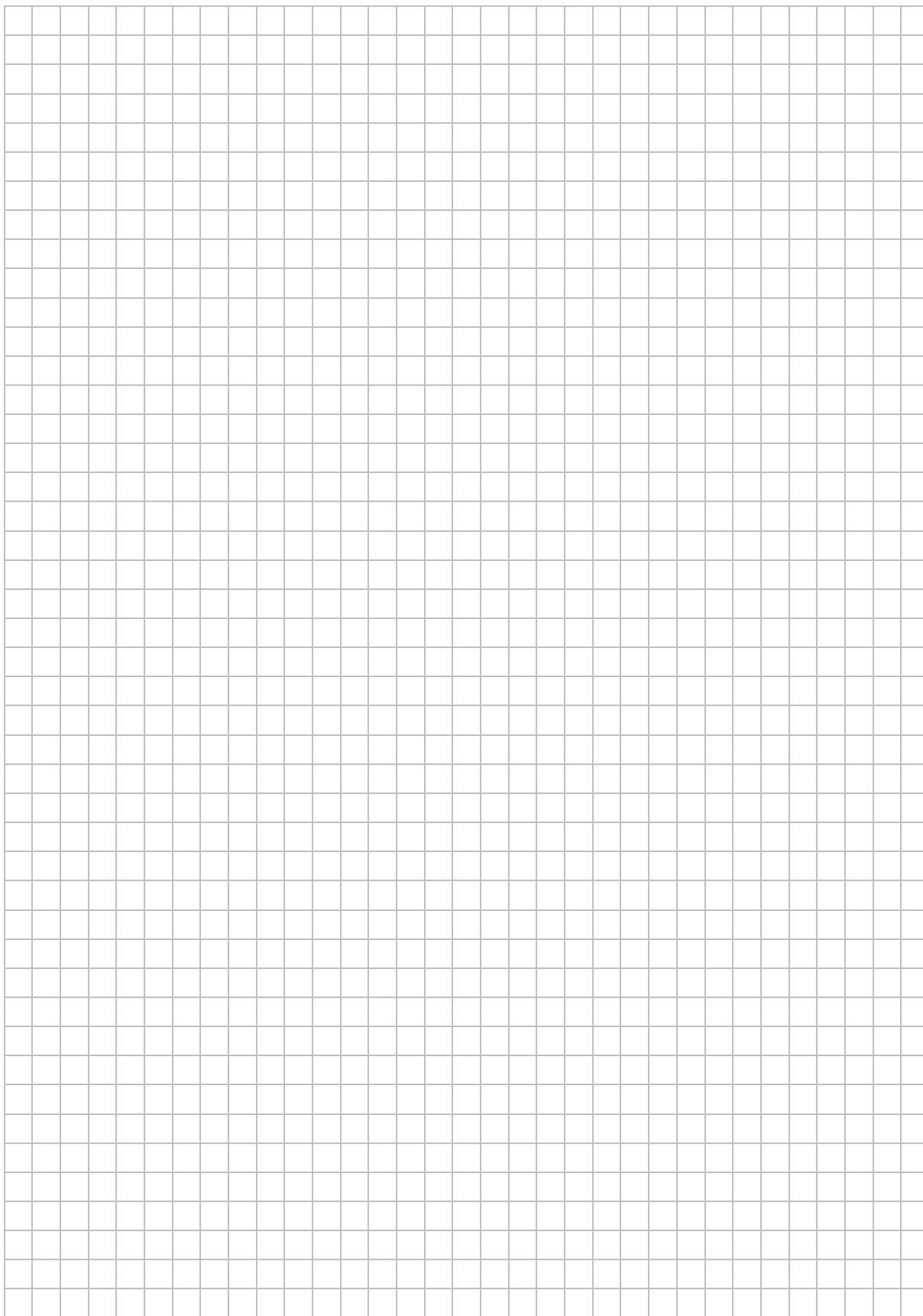
W skarbcu królewskim było  $k$  monet. Pierwszego dnia rano skarbnik dorzucił 25 monet, a każdego następnego ranka dorzucał o 2 monety więcej niż dnia poprzedniego. Jednocześnie ze skarbcza król zabierał w południe każdego dnia 50 monet. Oblicz najmniejszą liczbę  $k$ , dla której w każdym dniu w skarbcu była co najmniej jedna moneta, a następnie dla tej wartości  $k$  oblicz, w którym dniu w skarbcu była najmniejsza liczba monet.



Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	4.1.	4.2.	4.3.	4.4.	4.5.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt					

**Zadanie 5. (3 pkt)**

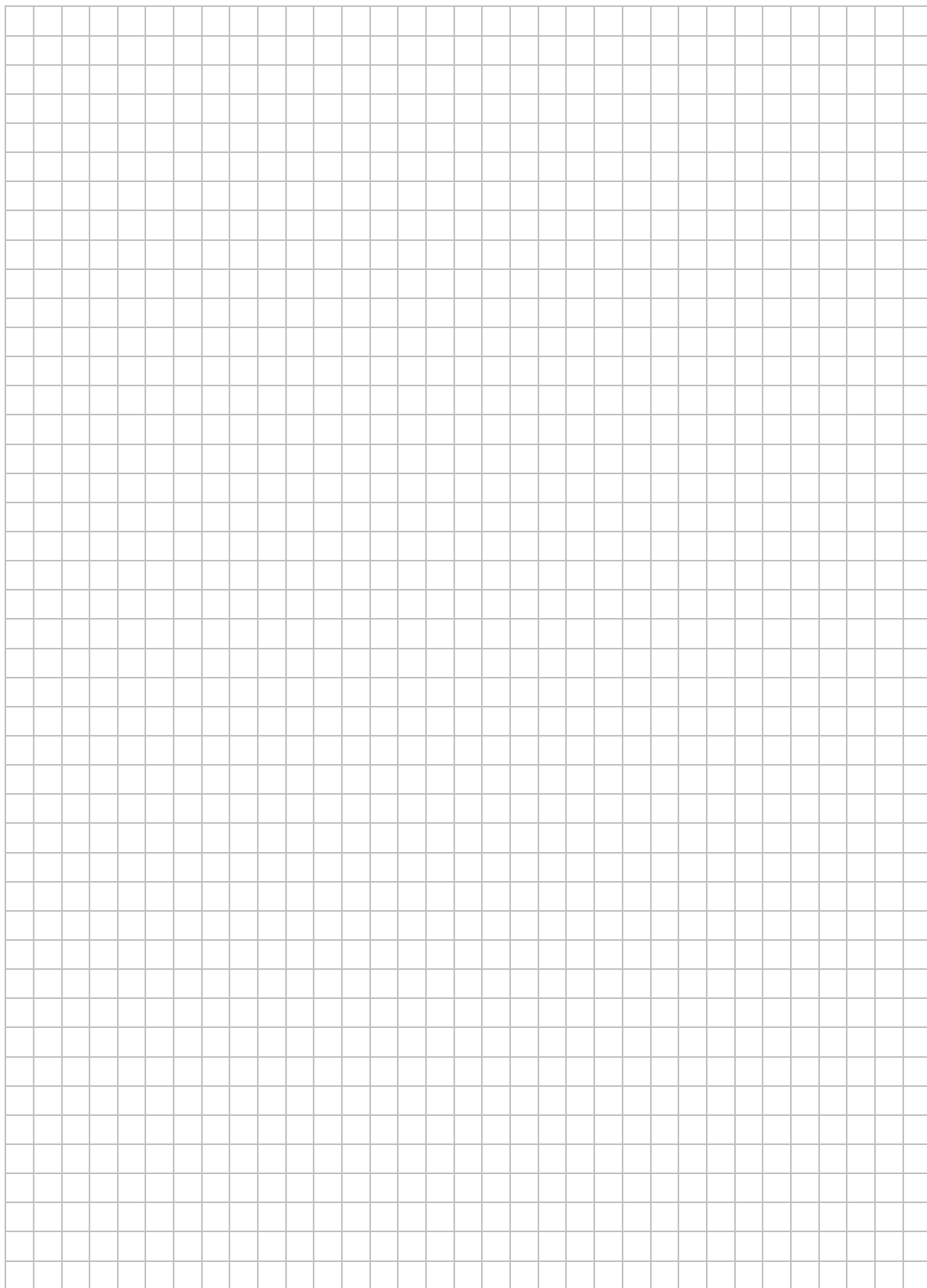
Wykaż, że jeżeli  $A = 3^{4\sqrt{2}+2}$  i  $B = 3^{2\sqrt{2}+3}$ , to  $B = 9\sqrt{A}$ .



Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	5.1.	5.2.	5.3.
	Maks. liczba pkt	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt			

**Zadanie 6. (5 pkt)**

Wyznacz dziedzinę funkcji  $f(x) = \log_{2\cos x}(9 - x^2)$  i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.

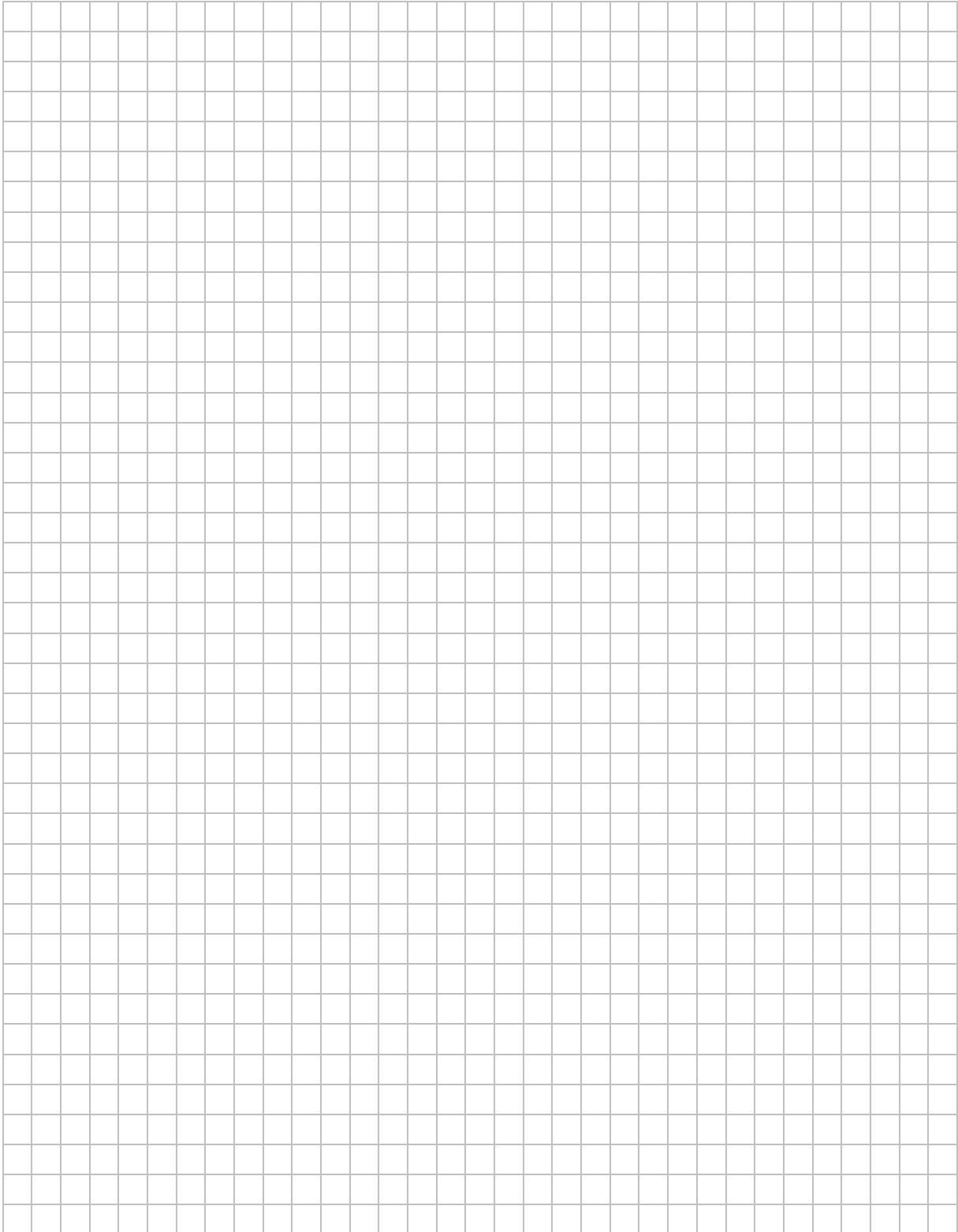


Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	6.1.	6.2.	6.3.	6.4.	6.5.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt					



**Zadanie 7. (6 pkt)**

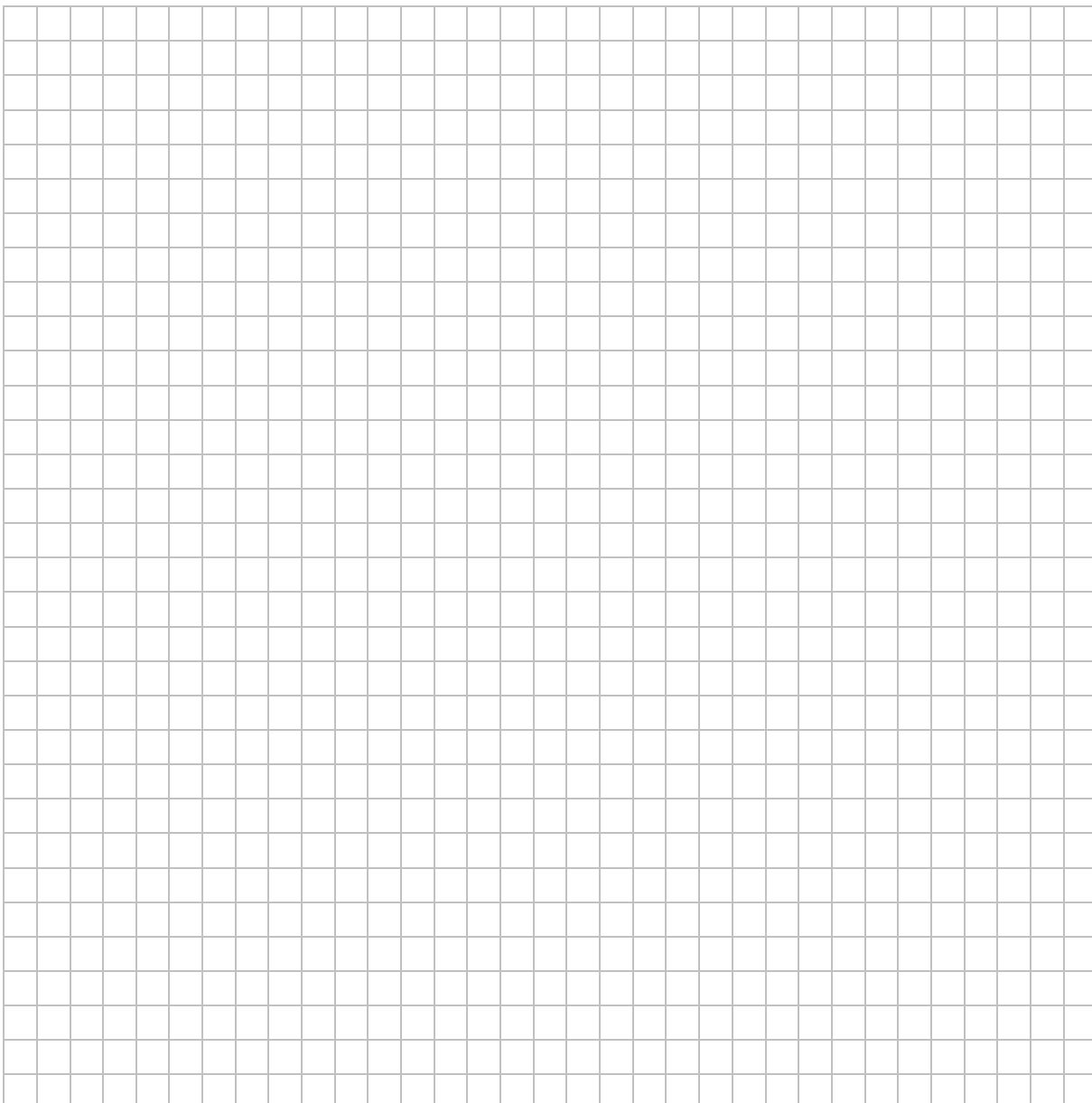
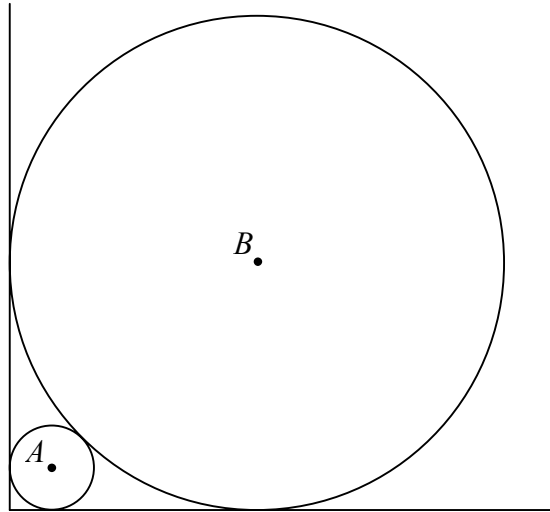
Ciąg  $(x-3, x+3, 6x+2, \dots)$  jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Oblicz iloraz tego ciągu i uzasadnij, że  $\frac{S_{19}}{S_{20}} < \frac{1}{4}$ , gdzie  $S_n$  oznacza sumę  $n$  początkowych wyrazów tego ciągu.

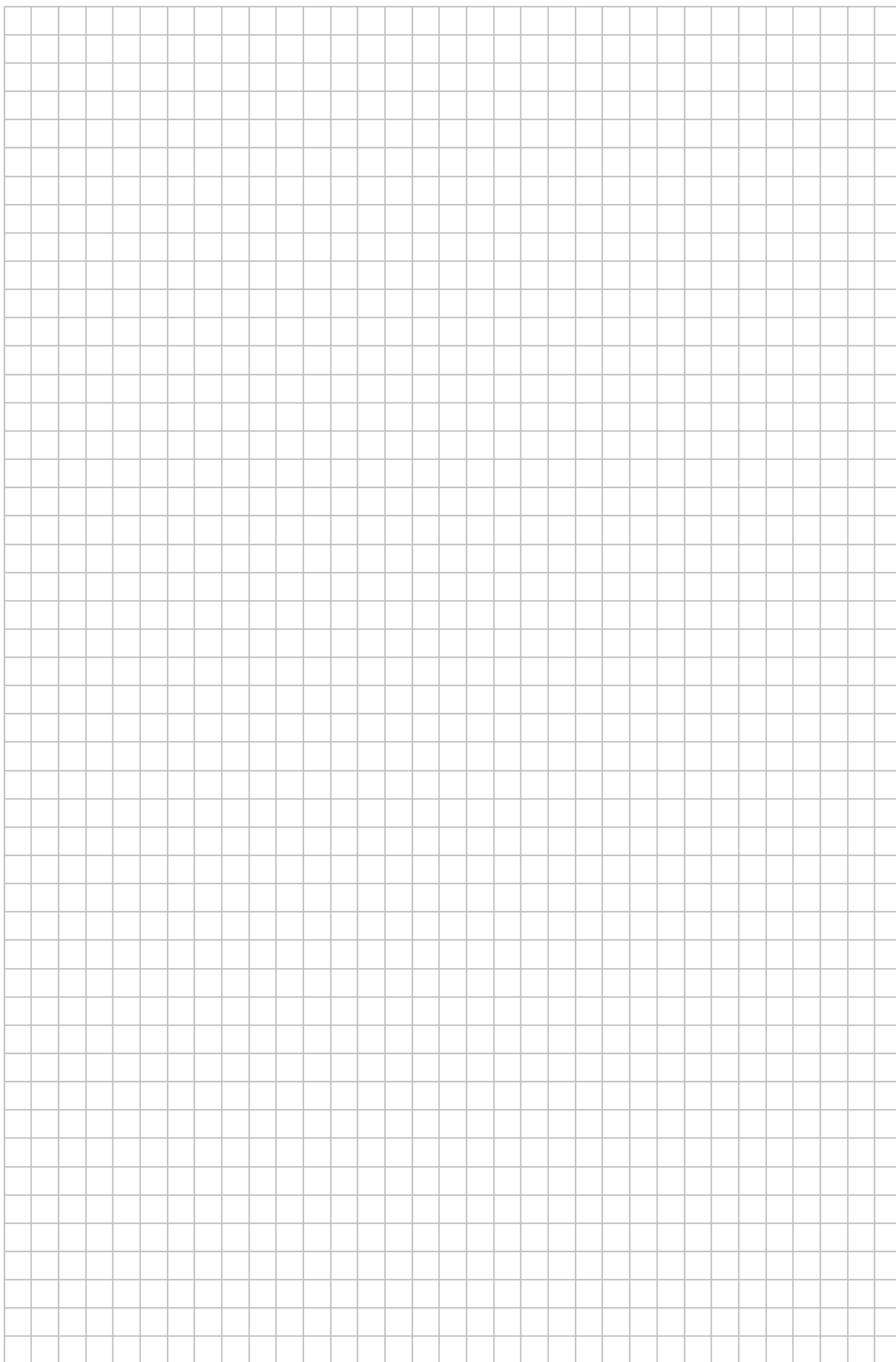


<b>Wypełnia egzaminator!</b>	<b>Nr czynności</b>	<b>7.1.</b>	<b>7.2.</b>	<b>7.3.</b>	<b>7.4.</b>	<b>7.5.</b>	<b>7.6.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>						

**Zadanie 8. (4 pkt)**

Dwa okręgi o środkach  $A$  i  $B$  są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest jednocześnie styczny do ramion tego samego kąta prostego (patrz rysunek). Udowodnij, że stosunek promienia większego z tych okręgów do promienia mniejszego jest równy  $3 + 2\sqrt{2}$ .

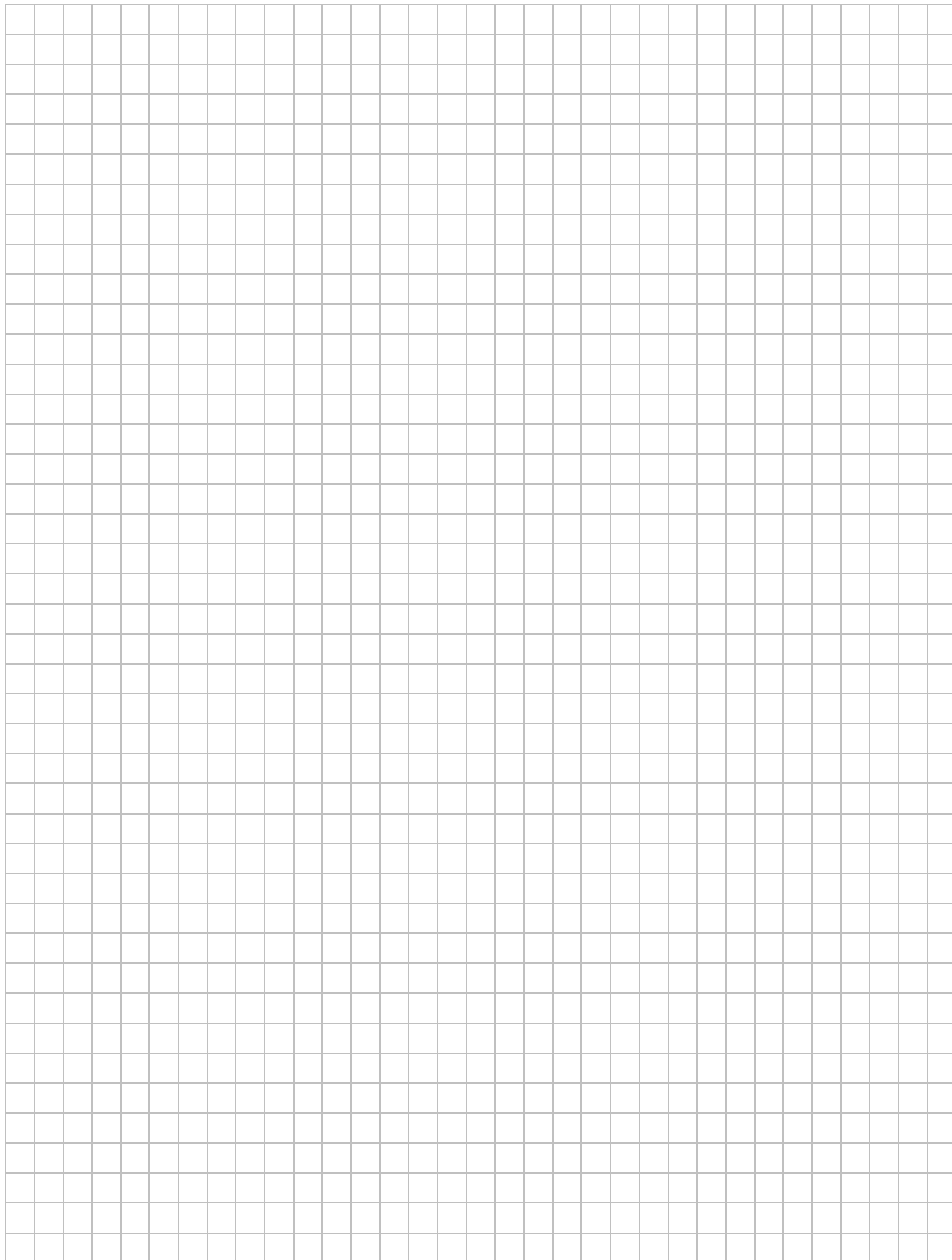




<b>Wypełnia egzaminator!</b>	<b>Nr czynności</b>	<b>8.1.</b>	<b>8.2.</b>	<b>8.3.</b>	<b>8.4.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>				

**Zadanie 9. (5 pkt)**

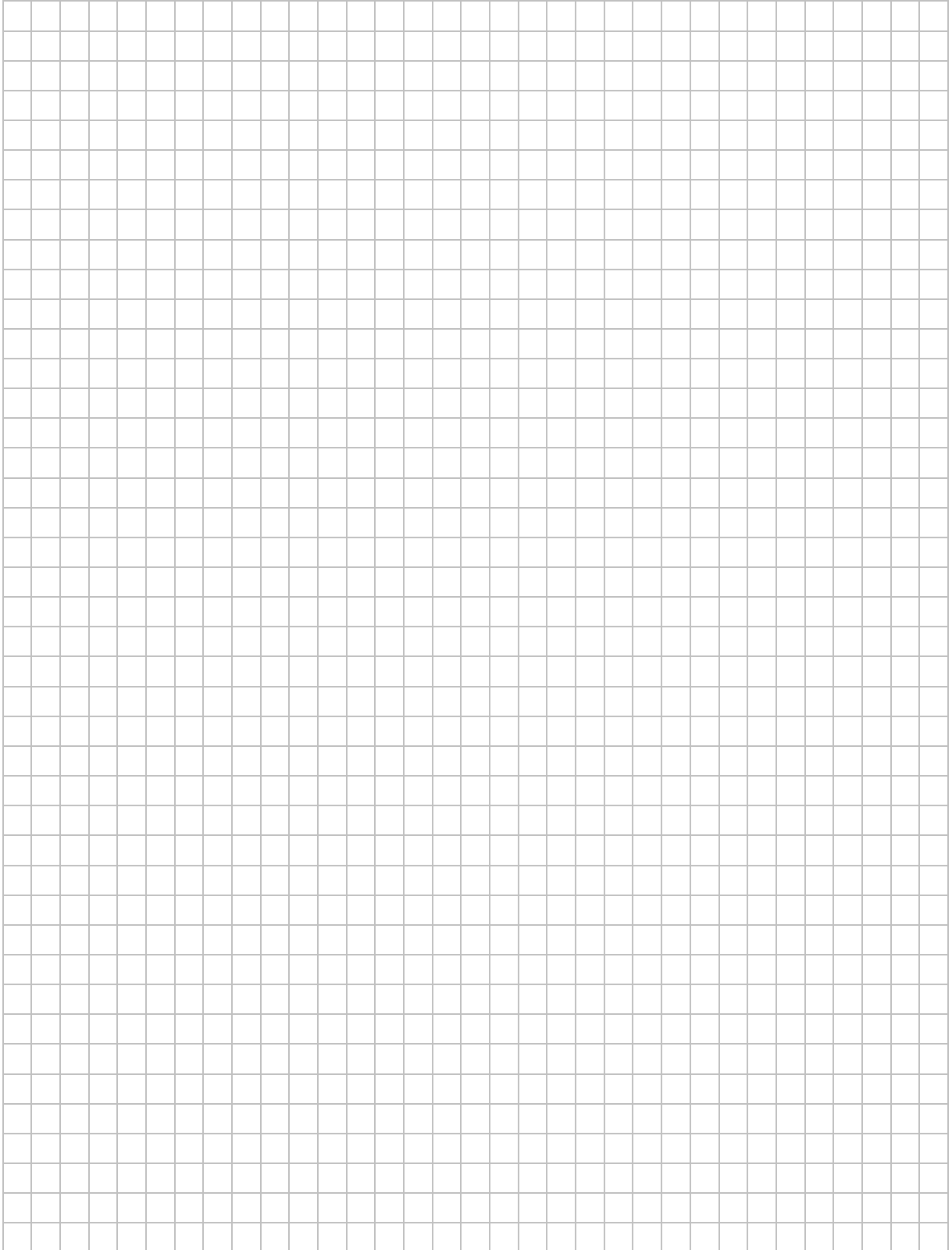
W układzie współrzędnych narysuj okrąg o równaniu  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$  oraz zaznacz punkt  $A = (0, -1)$ . Prosta o równaniu  $x = 0$  jest jedną ze stycznych do tego okręgu przechodzących przez punkt  $A$ . Wyznacz równanie drugiej stycznej do tego okręgu, przechodzącej przez punkt  $A$ .



Wypełnia egzaminator!	Nr czynności	9.1.	9.2.	9.3.	9.4.	9.5.
	Maks. liczba pkt	1	1	1	1	1
	Uzyskana liczba pkt					

**Zadanie 10. (4 pkt)**

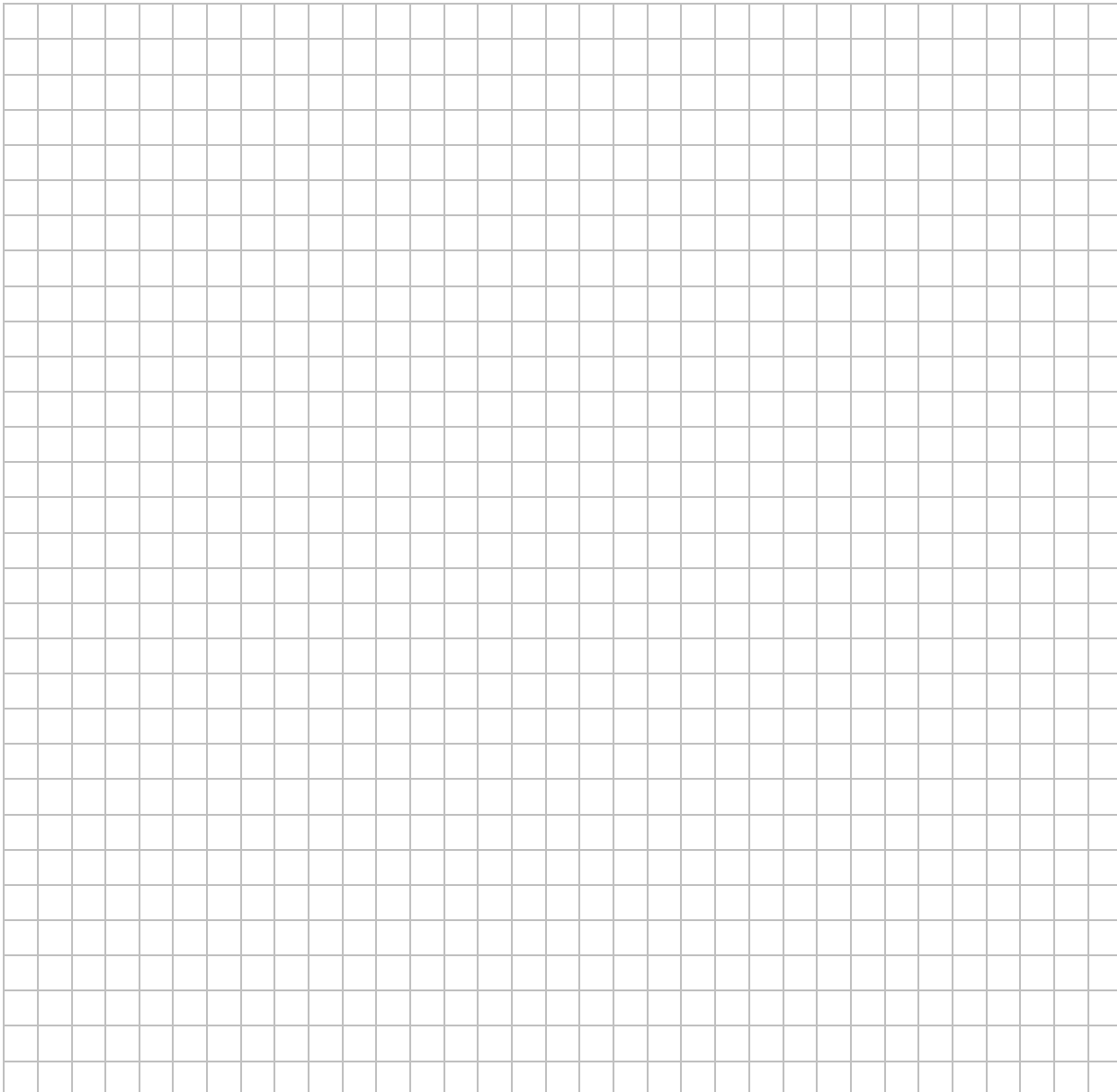
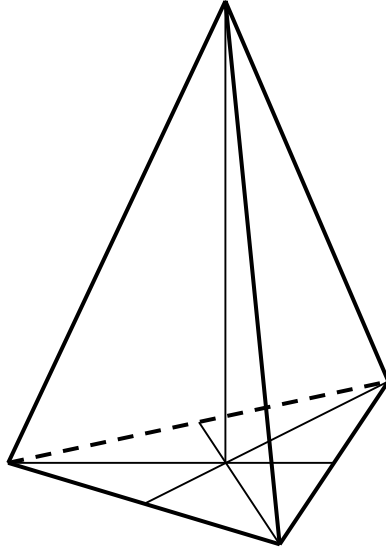
W urnie znajdują się jedynie kule białe i czarne. Kul białych jest trzy razy więcej niż czarnych. Oblicz, ile jest kul w urnie, jeśli przy jednoczesnym losowaniu dwóch kul prawdopodobieństwo otrzymania kul o różnych kolorach jest większe od  $\frac{9}{22}$ .

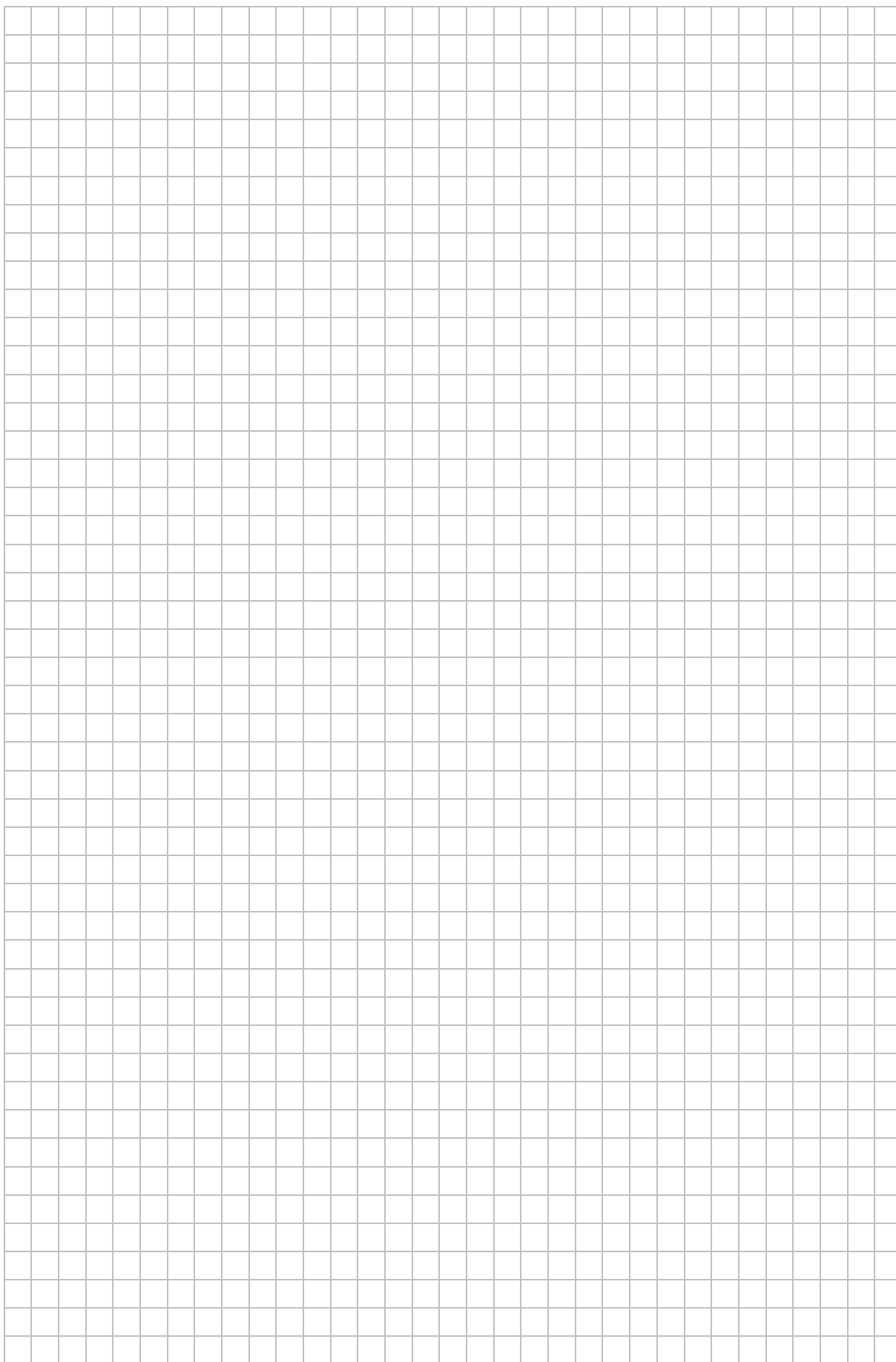


<b>Wypełnia egzaminator!</b>	<b>Nr czynności</b>	<b>10.1.</b>	<b>10.2.</b>	<b>10.3.</b>	<b>10.4.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>				

**Zadanie 11. (6 pkt)**

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym krawędź podstawy ma długość  $a$  i krawędź boczna jest od niej dwa razy dłuższa. Oblicz cosinus kąta między krawędzią boczną i krawędzią podstawy ostrosłupa. Narysuj przekrój ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej i oblicz pole tego przekroju.





<b>Wypełnia egzaminator!</b>	<b>Nr czynności</b>	<b>11.1.</b>	<b>11.2.</b>	<b>11.3.</b>	<b>11.4.</b>	<b>11.5.</b>	<b>11.6.</b>
	<b>Maks. liczba pkt</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
	<b>Uzyskana liczba pkt</b>						

**BRUDNOPIS**