Modele odpowiedzi do arkusza Próbnej Matury z OPERONEM

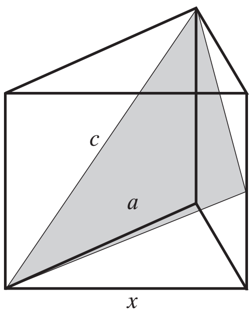
Matematyka
Poziom rozszerzony

Listopad 2010

W kluczu są prezentowane przykładowe prawidłowe odpowiedzi. Należy również uznać odpowiedzi ucznia, jeśli są inaczej sformułowane, ale ich sens jest synonimiczny wobec schematu, oraz inne odpowiedzi, nieprzewidziane w kluczu, ale poprawne.

Numer zadania	Zdający otrzymuje po 1 punkcie za	Suma punktów
1.	*rozwiązanie, w którym jest istotny postęp* Zdający sprowadzi wyrażenie do najprostszej postaci $\frac{(9x^2-4)(x+1)}{3x^3+2x^2-3x-2}=\frac{(3x-2)(3x+2)(x+1)}{(3x+2)\cdot x^2-(3x+2)}=\frac{(3x+2)(3x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)(3x+2)}=\frac{3x-2}{x-1}$, gdzie $x\neq 1$, $x\neq -1$, $x\neq -\frac{2}{3}$.	1 pkt
	pokonanie zasadniczych trudności zadania Zdający zapisze iloraz w postaci sumy dwóch składników, z których jeden jest liczbą całkowitą. Np.: $\frac{3x-2}{x-1}=\frac{3(x-1)+1}{x-1}=3+\frac{1}{x-1}$	2 pkt
	rozwiązanie zadania do końca, ale z usterkami Zdający rozważy tylko dzielniki liczby 1, będące liczbami naturalnymi, lub nie sprawdzi, czy znalezione liczby należą do dziedziny wyrażenia.	3 pkt
	rozwiązanie pełne Zdający zauważy, że wartość wyrażenia jest liczbą całkowitą, gdy $x-1$ jest dzielnikiem 1. $x-1=1$ lub $x-1=-1$ Zdający zapisze odpowiedź. $x=2$ lub $x=0$ – obie te liczby należą do dziedziny wyrażenia.	**4 pkt**
2.	*rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania* Zdający wyróżni przedziały: $(-\infty,-2)$, $\langle -2,4)$, $\langle 4,\infty)$.	1 pkt
	rozwiązanie, w którym jest istotny postęp Zdający zapisze równanie w poszczególnych przedziałach. Np.: $x\in(-\infty,-2)$ $\quad -x-2+x-4=6$ $x\in\langle -2,4)$ $\quad x+2+x-4=6$ $x\in\langle 4,\infty)$ $\quad x+2-x+4=6$	2 pkt
	pokonanie zasadniczych trudności zadania Zdający rozwiąże równania. Zdający ustali, że dla $x\in(-\infty,-2)$ równanie nie ma rozwiązania, dla $x\in\langle -2,4)$ równanie nie ma rozwiązania, dla $x\in\langle 4,\infty)$ równane jest tożsamościowe – każda liczba rzeczywista należąca do tego przedziału spełnia równanie.	3 pkt

Numer zadania	Zdający otrzymuje po 1 punkcie za	Suma punktów
	rozwiązanie pełne Zdający poda odpowiedź: Do przedziału $\langle 4, \infty)$ należy co najmniej jedna liczba niewymierna, np. $\sqrt{39}$. Liczba ta należy do zbioru rozwiązań równania.	**4 pkt**
3.	*rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania* Zdający obliczy długość r promienia okręgu i jego średnicę d. $2\pi r = 13\pi$ $r = 6{,}5$ $d = 13$	1 pkt
	rozwiązanie, w którym jest istotny postęp Zdający zauważy, że przekątna trapezu jest prostopadła do jednego z ramion (kąt wpisany oparty na średnicy jest prosty) i obliczy długość x tego ramienia. $x^2 + 12^2 = 13^2$, $x = 5$	2 pkt
	pokonanie zasadniczych trudności zadania Zdający obliczy wysokość trapezu. $13 \cdot h = 12 \cdot 5$, $h = \frac{60}{13}$	3 pkt
	rozwiązanie prawie całkowite Zdający zauważy, że trapez jest równoramienny i obliczy długość krótszej podstawy. $b = \frac{119}{13}$	4 pkt
	rozwiązanie pełne Zdający obliczy pole trapezu. $P = \frac{1}{2}\left(13 + \frac{119}{13}\right) \cdot \frac{60}{13} = 51\frac{21}{169}$	**5 pkt**
4.	*rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania* Zdający zapisze wielomian $W(x)$ za pomocą wielomianu niezerowego $Q(x)$, wielomianu $P(x)$ i reszty $R(x) = ax^2 + bx + c$. $W(x) = Q(x) \cdot P(x) + ax^2 + bx + c$	1 pkt
	rozwiązanie, w którym jest istotny postęp Zdający zauważy, że reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x - a$ jest równa $W(a)$ i zapisze odpowiednie równości. $a + b + c = 1$ $a - b + c = -1$ $4a - 2b + c = 3$	2 pkt
	pokonanie zasadniczych trudności zadania Zdający rozwiąże otrzymany układ równań. $a = \frac{5}{3}$, $b = 1$, $c = -\frac{5}{3}$	3 pkt
	rozwiązanie pełne Zdający zapisze resztę. $R(x) = \frac{5}{3}x^2 + x - \frac{5}{3}$	**4 pkt**
5.	*rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania* Zdający obliczy wyróżnik trójmianu. $\Delta = (m-5)^2 - 4(m-7) = m^2 - 14m + 53$	1 pkt

Numer zadania	Zdający otrzymuje po 1 punkcie za	Suma punktów
	rozwiązanie, w którym jest istotny postęp Zdający zapisze wyróżnik np. w postaci $\Delta = (m-7)^2 + 4$ i stwierdzi, że wartość tego wyrażenia jest zawsze dodatnia, zatem równanie ma dla każdej liczby rzeczywistej m dwa różne pierwiastki.	2 pkt
	pokonanie zasadniczych trudności zadania Zdający zapisze warunek podany w zadaniu, wykorzystując np. wzory Viete'a. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = [-(m-5)]^2 - 2\cdot(m-7) = m^2 - 12m + 39$	3 pkt
	rozwiązanie prawie całkowite Zdający zapisze sumę kwadratów pierwiastków równania w postaci $x_1^2 + x_2^2 = (m-6)^2 + 3$.	4 pkt
	rozwiązanie pełne Zdający stwierdzi, że wartość wyrażenia $(m-6)^2 + 3$ jest najmniejsza, gdy $m = 6$.	**5 pkt**
6.	*rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania* Zdający obliczy wysokość H graniastosłupa i długość x jego krawędzi podstawy. $6x + 3H = 60$ $6x + 3(x+2) = 60$ $x = 6,\ H = 8$	1 pkt
	rozwiązanie, w którym jest istotny postęp Zdający sporządzi rysunek graniastosłupa, zaznaczając odpowiedni przekrój lub narysuje odpowiedni trójkąt. 	2 pkt
	pokonanie zasadniczych trudności zadania Zdający obliczy długość c przekątnej ściany bocznej graniastosłupa i długość ramienia a trójkąta, będącego przekrojem. $c = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ $a = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$	3 pkt
	rozwiązanie prawie całkowite Zdający stwierdzi, że rozpatrywany przekrój jest trójkątem równoramiennym o podstawie 10 i ramieniu $\sqrt{52}$ i obliczy wysokość tego trójkąta. $h = \sqrt{52 - 25} = \sqrt{27}$	4 pkt
	rozwiązanie pełne Zdający obliczy pole przekroju. $P = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot\sqrt{27} = 15\sqrt{3}$	**5 pkt**

Numer zadania	Zdający otrzymuje po 1 punkcie za	Suma punktów
7.	*rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania* Zdający przekształci rozpatrywane wyrażenie, wykorzystując odpowiednie wzory. $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=$ $=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta$	1 pkt
	rozwiązanie, w którym jest istotny postęp Zdający wykorzysta związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta do zapisania wyrażenia za pomocą jednej funkcji trygonometrycznej. Np.: $\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=\cos^2\alpha\cos^2\beta-(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)$.	2 pkt
	pokonanie zasadniczych trudności zadania Zdający przekształci otrzymane wyrażenie do postaci $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1$.	3 pkt
	rozwiązanie pełne Zdający zauważy, że $\cos^2\alpha+\cos^2\beta\leqslant 2$, zatem $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1\leqslant 1$.	**4 pkt**
8.	*rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania* Zdający wykaże, że utworzone w ten sposób czworokąty są kwadratami – C_1 jest rombem, w którym każdy kąt ma miarę 90°, jest więc kwadratem. Podobnie następne czworokąty są kwadratami.	1 pkt
	rozwiązanie, w którym jest istotny postęp Zdający wykaże, że pole każdego z następnych kwadratów jest równe połowie pola kwadratu, z którego powstał.	2 pkt
	pokonanie zasadniczych trudności zadania Zdający zauważy, że ciąg pól tworzonych kwadratów jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie 8 i ilorazie $\frac{1}{2}$.	3 pkt
	rozwiązanie prawie całkowite Zdający zastosuje wzór na sumę m wyrazów ciągu geometrycznego, tworząc i rozwiązując odpowiednie równanie. $8\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^m}{1-\frac{1}{2}}=15\frac{3}{4}$ $1-\left(\frac{1}{2}\right)^m=\frac{63}{64}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^m=\frac{1}{64}$ $m=6$	4 pkt
	rozwiązanie pełne Zdający wyznaczy liczbę n. $n=6-1=5$	**5 pkt**

Numer zadania	Zdający otrzymuje po 1 punkcie za	Suma punktów
9.	*rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania* Zdający zapisze za pomocą wyrażenia algebraicznego prawdopodobieństwo wyciągnięcia dwóch skarpetek zielonych. x – liczba skarpetek zielonych $P(ZZ) = \frac{x}{3x} \cdot \frac{x-1}{3x-1}$	1 pkt
	rozwiązanie, w którym jest istotny postęp Zdający zapisze za pomocą wyrażenia algebraicznego prawdopodobieństwo wyciągnięcia dwóch skarpetek różnych kolorów. $P(RK) = \frac{x}{3x} \cdot \frac{2x}{3x-1} + \frac{2x}{3x} \cdot \frac{x}{3x-1}$	2 pkt
	pokonanie zasadniczych trudności zadania Zdający zapisze odpowiednie równanie i sprowadzi je do najprostszej postaci. $\frac{x}{3x} \cdot \frac{x-1}{3x-1} + \frac{13}{33} = \frac{x}{3x} \cdot \frac{2x}{3x-1} + \frac{2x}{3x} \cdot \frac{x}{3x-1}$ $\frac{x-1}{3x-1} + \frac{39}{33} = \frac{4x}{3x-1}$	3 pkt
	rozwiązanie prawie całkowite Zdający rozwiąże równanie – obliczy liczbę skarpetek zielonych. $x = 4$	4 pkt
	rozwiązanie pełne Zdający poda liczbę wszystkich skarpetek: $4 + 8 = 12$.	**5 pkt**
10.	*rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania* Zdający zapisze równanie okręgu $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 17$ i zauważy, że każdy punkt leżący na osi OX ma współrzędne $(x, 0)$.	1 pkt
	rozwiązanie, w którym jest istotny postęp Zdający wyznaczy współrzędne punktów przecięcia okręgu z osią OX. $(x-2)^2 + 1 = 17$ $(x-2)^2 - 16 = 0$ $x - 2 - 4 = 0$ lub $x - 2 + 4 = 0$ $x = 6$ lub $x = -2$ $A = (6, 0)$ $B = (-2, 0)$	2 pkt
	pokonanie zasadniczych trudności zadania Zdający wyznaczy długość odcinka AB: $\lvert AB \rvert = 8$ oraz odległość d punktu C od osi OX. $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot d = 24$ $d = 6$	3 pkt
	rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)	4 pkt

Numer zadania	Zdający otrzymuje po 1 punkcie za	Suma punktów
	rozwiązanie pełne Zdający wyznaczy pierwszą współrzędną punktu C, wiedząc, że druga współrzędna jest równa 6 lub -6. $3x-6+3=0$ lub $3x-(-6)+3=0$ $x=1$ lub $x=-3$ Zdający poda współrzędne punktu C. $C=(1,6)$ lub $C=(-3,-6)$	**5 pkt**
11.	*rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania* Zdający zauważy, że wykres funkcji f powstał w wyniku przekształcenia przez symetrię względem osi OX wykresu funkcji $\sin ax$ oraz dwukrotnego „rozciągnięcia” go wzdłuż osi OY. Okresem funkcji $\sin ax$ jest π, stąd $a=2$.	1 pkt
	rozwiązanie, w którym jest istotny postęp Zdający zapisze wzór funkcji. $f(x)=2(-\sin 2x)=-2\sin 2x$	2 pkt
	pokonanie zasadniczych trudności zadania Zdający zapisze i przekształci odpowiednie równanie $-2\sin 2x=-\sqrt{3}$ $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ lub $2x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in C$	3 pkt
	rozwiązanie pełne Zdający poda rozwiązanie równania. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$ dla $k\in C$	**4 pkt**