KRYTERIA OCENIANIA ODPOWIEDZI
Próbna Matura z OPERONEM

Matematyka
Poziom rozszerzony

Listopad 2015

Zadania zamknięte

Za każdą poprawną odpowiedź zdający otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
1.	D	Funkcja ma wszystkie wartości dodatnie.
2.	D	$\sin(60^\circ-45^\circ)=\sin 60^\circ \cos 45^\circ-\sin 45^\circ \cos 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
3.	D	$f'(x)=x^4-2x^3+x^2=x^2(x^2-2x+1)=x^2(x-1)^2$ Funkcja $f'(x)$ przyjmuje tylko wartości nieujemne, zatem funkcja stale rośnie, nie ma więc ekstremów.
4.	C	$ABCS$, BCD – odpowiednio ostrosłup i przekrój h – wysokość przekroju $h=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}$ $P=\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot\frac{a}{2}\Rightarrow P=\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$
5.	D	$a_2=\frac{11}{2},\ a_3=\frac{\frac{33}{2}-2}{2}=\frac{29}{4},\ a_4=\frac{\frac{87}{4}-3}{2}=\frac{75}{8}$

Zadania otwarte – kodowane

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania	Liczba punktów
6.	8 5 7	$l: 5x-3y-14=0$ $d(A,l)=\frac{\lvert 25-6-14\rvert}{\sqrt{25+9}}=\frac{5}{\sqrt{34}}=\frac{5\sqrt{34}}{34}=0{,}857492\ldots$	0–2
7.	6 6 1	$64=100+144-240\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{3}{4}\Rightarrow\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{9}{16}}\Rightarrow$ $\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}=0{,}66143782\ldots$	0–2
8.	1 7 6	$f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-(x^2-1)2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-6x}{(x^2-4)^2}\Rightarrow f'(-\sqrt{7})=\frac{2\sqrt{7}}{3}=$ $=1{,}763834\ldots$	0–2

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania	Liczba punktów
9.	0 9 0	$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2+4+6+\ldots+2n}{11n^2-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{2+2n}{2}n}{11n^2-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+n}{11n^2-1}=\frac{1}{11}=$ $=0{,}090909\ldots$	0–2
10.	2 5 9	$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=\frac{-b^3}{a^3}-3\cdot\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)=$ $=-7^3-12(-7)=-343+84=-259$	0–2

Zadania otwarte

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
11.	Rozwiązanie: $\log_{24}6=a\Rightarrow\log_6 24=\frac{1}{a}$ $\log_6 256=\log_6 4^4=4\log_6 4$ $4\log_6 4=4\cdot\log_6\frac{24}{6}=4(\log_6 24-\log_6 6)=4\left(\frac{1}{a}-1\right)=\frac{4(1-a)}{a}$	0–3
	Istotny postęp: Zapisanie równości: $\log_{24}6=a\Rightarrow\log_6 24=\frac{1}{a}$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie równości: $\log_6 256=\log_6 4^4=4\log_6 4=4\cdot\log_6\frac{24}{6}$	2
	Rozwiązanie pełne: Wykazanie tezy zadania: $4(\log_6 24-\log_6 6)=4\left(\frac{1}{a}-1\right)=\frac{4(1-a)}{a}$	3
12.	Rozwiązanie: $S=(3,-5)$, $r=\sqrt{34}$ $l: 4x+3y+C=0$ $d(S,l)=r\Leftrightarrow\frac{\lvert 12-15+C\rvert}{\sqrt{16+9}}=\sqrt{34}\Rightarrow C=5\sqrt{34}+3\vee C=-5\sqrt{34}+3$ Styczne mają wzory: $4x+3y+5\sqrt{34}+3=0$, $4x+3x-5\sqrt{34}+3$	0–3
	Istotny postęp: Wyznaczenie środka i promienia okręgu: $S=(3,-5)$, $r=\sqrt{34}$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie stycznej w postaci $l: 4x+3y+C=0$ i warunku styczności: $d(S,l)=r\Leftrightarrow\frac{\lvert 12-15+C\rvert}{\sqrt{16+9}}=\sqrt{34}$	2
	Rozwiązanie pełne: Rozwiązanie równania i zapisanie odpowiedzi: $C=5\sqrt{34}+3\vee C=-5\sqrt{34}+3$ Styczne mają wzory: $4x+3y+5\sqrt{34}+3=0$, $4x+3x-5\sqrt{34}+3$	3

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
13.	Rozwiązanie: $a \neq 0 \wedge \Delta > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$ $(m+5)^2 = x_1 x_2 \Rightarrow (m+5)^2 = 4 \Rightarrow m+5 = 2 \vee m+5 = -2$ $m = -3 \vee m = -7$ – pierwsza liczba nie spełnia warunku $\Delta > 0$ $m = -7$	0–4
	Postęp: Zapisanie i rozwiązanie warunków: $a \neq 0 \wedge \Delta > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$	1
	Istotny postęp: Zapisanie trzeciego warunku w postaci: $(m+5)^2 = x_1 x_2$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie trzeciego warunku w postaci: $(m+5)^2 = 4 \Rightarrow m+5 = 2 \vee m+5 = -2$	3
	Rozwiązanie pełne: Wyznaczenie części wspólnej rozwiązań wszystkich warunków: $m = -7$	4
14.	Rozwiązanie: $h = EF$ – wysokość trójkąta BDE $P_{\Delta BDE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{32} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{8}$ $\frac{\lvert FB \rvert}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{8}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \lvert FB \rvert = \frac{a}{8} \Rightarrow \lvert DF \rvert = \frac{3a}{8}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{8}}{\frac{3a}{8}} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$	0–4
	Postęp: Wprowadzenie oznaczeń: $h = EF$ – wysokość trójkąta BDE $P_{\Delta BDE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{32} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{8}$	1
	Istotny postęp: Obliczenie długości odcinka FB: $\frac{\lvert FB \rvert}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{8}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \lvert FB \rvert = \frac{a}{8}$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Obliczenie długości odcinka DF: $\lvert DF \rvert = \frac{a}{2} - \frac{a}{8} = \frac{3a}{8}$	3
	Rozwiązanie pełne: Wyznaczenie kąta α: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{8}}{\frac{3a}{8}} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$	4

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
15.	Rozwiązanie: $\sin 2x + \cos 4x = 0 \Rightarrow \sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = 0$ $2\sin\frac{2x + \frac{\pi}{2} - 4x}{2}\cos\frac{2x - \frac{\pi}{2} + 4x}{2} = 0 \Rightarrow \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \vee \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(-x + \frac{\pi}{4}\right) = k\pi \vee \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, k \in C$	0–4
	Istotny postęp: Zapisanie równania w postaci: $\sin 2x + \cos 4x = 0 \Rightarrow \sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = 0$ $2\sin\frac{2x + \frac{\pi}{2} - 4x}{2}\cos\frac{2x - \frac{\pi}{2} + 4x}{2} = 0$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie alternatywy równań: $\sin\frac{2x + \frac{\pi}{2} - 4x}{2} = 0 \vee \cos\frac{2x - \frac{\pi}{2} + 4x}{2} = 0$	2
	Rozwiązanie prawie pełne: Zapisanie rozwiązań w postaci: $\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) = k\pi \vee \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, k \in C$	3
	Rozwiązanie pełne: Zapisanie rozwiązań w postaci: $x = \frac{\pi}{4} - k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, k \in C$	4
16.	Rozwiązanie: $\pi r^2 h = \pi \Rightarrow h = \frac{1}{r^2}$ $P(x) = 2\pi rh + 2\pi r^2 = \frac{2\pi r}{r^2} + 2\pi r^2, P(x) = 2\pi\frac{1 + r^3}{r}, r > 0$ $P'(x) = 2\pi\frac{2r^3 - 1}{r^2}, P'(x) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ Po przeanalizowaniu znaków pochodnej otrzymujemy: w punkcie $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ funkcja osiąga minimum, które jest jednocześnie najmniejszą wartością funkcji.	0–7
	I część: Wyznaczenie wzoru funkcji określającej pole walca Wyznaczenie zależności między promieniem podstawy i wysokością walca: $\pi r^2 h = \pi \Rightarrow h = \frac{1}{r^2}$	1
	Wyznaczenie wzoru na pole całkowite walca: $P(r,h) = 2\pi rh + 2\pi r^2 = \frac{2\pi r}{r^2} + 2\pi r^2, P(r) = 2\pi\frac{1 + r^3}{r}$	2
	Wyznaczenie dziedziny funkcji: $r \in (0, +\infty)$	3 (za I część przyznaje się 3 pkt)
	II część: Zbadanie pochodnej i wyznaczenie ekstremum Wyznaczenie wzoru pochodnej funkcji: $P'(r) = 2\pi\frac{2r^3 - 1}{r^2}$	4

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
	Wyznaczenie miejsca zerowego pochodnej: $P'(r)=0 \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	5
	Zbadanie znaków pochodnej i zapisanie wniosku dotyczącego maksimum funkcji: $P'(r)>0$ dla $r\in\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}},+\infty\right)$, $P'(r)<0$ dla $r\in\left(0,\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$, zatem funkcja rośnie w przedziale $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}},+\infty\right)$, a maleje w przedziale $\left(0,\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$, stąd w punkcie $r=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ funkcja osiąga minimum będące jednocześnie najmniejszą wartością funkcji, więc wymiary walca: $r=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, $h=\sqrt[3]{4}$.	6 (za II część przyznaje się 3 pkt)
	III część Wyznaczenie najmniejszej wartości funkcji: $P\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)=3\pi\sqrt[3]{2}$	7 (za III część przyznaje się 1 pkt)
17.	Rozwiązanie: A – wylosowanie dwóch kul białych z drugiej urny w drugim losowaniu B_1, B_2 – odpowiednio wylosowanie białej kuli z pierwszej urny w pierwszym losowaniu i wylosowanie czarnej kuli z pierwszej urny w pierwszym losowaniu $P(B_1)=\frac{3}{10}$, $P(B_2)=\frac{7}{10}$ $P(A/B_1)=\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{15}{45}$, $P(A/B_2)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{10}{45}$ $P(A)=\frac{3}{10}\cdot\frac{15}{45}+\frac{7}{10}\cdot\frac{10}{45}=\frac{23}{90}$	0–5
	Postęp: Wprowadzenie oznaczeń: A – wylosowanie dwóch kul białych z drugiej urny w drugim losowaniu B_1, B_2 – odpowiednio wylosowanie białej kuli z pierwszej urny w pierwszym losowaniu i wylosowanie czarnej kuli z pierwszej urny w pierwszym losowaniu	1
	Istotny postęp: Obliczenie prawdopodobieństw: $P(B_1)=\frac{3}{10}$, $P(B_2)=\frac{7}{10}$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie prawdopodobieństw: $P(A/B_1)=\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}$, $P(A/B_2)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}$	3
	Rozwiązanie prawie pełne: Zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia w postaci: $P(A)=\frac{3}{10}\cdot\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}+\frac{7}{10}\cdot\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}$	4
	Rozwiązanie pełne: Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia $A: P(A)=\frac{23}{90}$	5

<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Modelowe etapy rozwiązywania zadania</th><th>Liczba punktów</th></tr>
<tr><td rowspan="4">18.</td><td>Rozwiązanie:
Zapisujemy układ: $\begin{cases} x+y+z=63 \\ (y+15)^2=(x-1)(z+37) \\ y=\frac{x+z}{2} \end{cases}$, po rozwiązaniu otrzymujemy:
$\begin{cases} x=25 \\ y=21 \\ z=17 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=55 \\ y=21 \\ z=-13 \end{cases}$</td><td>0–5</td></tr>
<tr><td>Istotny postęp:
Zapisanie układu równań: $\begin{cases} x+y+z=63 \\ (y+15)^2=(x-1)(z+37) \\ y=\frac{x+z}{2} \end{cases}$</td><td>2 (1 pkt, gdy zapisano tylko dwa równania)</td></tr>
<tr><td>Pokonanie zasadniczych trudności:
Przekształcenie układu do równania kwadratowego, np.: $x^2-80x+1375=0$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Rozwiązanie pełne:
Rozwiązanie równania i zapisanie odpowiedzi: $\begin{cases} x=25 \\ y=21 \\ z=17 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=55 \\ y=21 \\ z=-13 \end{cases}$</td><td>5 (4 pkt, gdy popełniono błąd rachunkowy)</td></tr>
</table>